# Analisi 2. Secondo Compitino. 20.03.2021

*Campo obbligatorio

1. Indirizzo email *

2. Cognome *

Istruzioni di compilazione: Si usi:

- lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
- il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per $2^3$;
- il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per $a_n$;
- `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
- `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per $e^2$;
- `Pi` per $\pi$;
- le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
- le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
- per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

## Domanda 1

Si stabilisca se le funzioni definite nel seguito ammettono integrale (secondo Lebesgue) sui rispettivi insiemi

6. 2 punti

$f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$ sull'intervallo $[0, +\infty]$.

*Contrassegna solo un ovale.*

- ( ) ammette integrale
- (X) non ammette integrale

visto a lezione

7. 2 punti

$f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ sull'intervallo $[1, +\infty]$.

*Contrassegna solo un ovale.*

$\left|\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2} \leftarrow$ INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO SU $[1,+\infty[$

- (X) ammette integrale
- ( ) non ammette integrale

8. 2 punti

$$f(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \text{ sull'insieme } B := \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+y^2 \geq 1\}.$$

*Contrassegna solo un ovale.*

- [x] ammette integrale
- [ ] non ammette integrale

coordinate sferiche

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\psi \int^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \sin\psi \, d\rho = 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\psi}_{=2} \underbrace{\int_1^{+\infty} d\rho}_{=+\infty} = +\infty$$

9. 2 punti

$$f(x,y,z) := \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2} \text{ sull'insieme } D := \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+y^2 \leq 1\}.$$

*Contrassegna solo un ovale.*

- [x] ammette integrale
- [ ] non ammette integrale

$|f| \leq \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. Passo in coordinate polari e trovo $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\psi \int_0^1 d\rho = 4\pi$

(stessi calcoli sopra ora per $\rho \in [0,1]$)

Domanda 2

Si considerino l'insieme $V$ definito da:

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xyz = e^{x-1}, x+1 = y+z\}$$

e il punto $P_0 = (1,1,1)$. Si vede facilmente che $P_0 \in V$.

$V = \{G = \binom{0}{0}\}$ dove $G = \begin{pmatrix} e^{x-1} - xyz \\ x-y-z+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial(xyz)} = \begin{bmatrix} e^{x-1} - yz, & -xz, & -xy \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial G}{\partial(xyz)}(P_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Allora $\det\left(\frac{\partial G}{\partial(xy)}\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

((a) è $\boxed{SI}$); anche $\det\left(\frac{\partial G}{\partial(xz)}\right) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ((b) è $\boxed{SI}$), mentre

$\det \frac{\partial G}{\partial yz} = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ (c) è $\boxed{NO}$

Sempre per Dini, nel caso (a), si trova $F(z) = (x(z), y(z))$ per cui vicino a $P_0$ si ha $V = \{(x(z), y(z), z) \;\; z \text{ vicino a } 1\}$ e come noto $F'(1) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(xy)}(P_0)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial z}(P_0) = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \gamma'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Analogamente nel caso (b) trovo $F(y) = (x(y), z(y))$ e

$F'(1) = -\frac{\partial G}{\partial(xz)}(P_0)^{-1} \frac{\partial G}{\partial y} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

10. 4 punti

Si individuino quali tra le affermazioni seguenti si deducono dal teorema del Dini (anche più di una o eventualmente nessuna)

(a) Vicino al punto $P_0$ l'insieme $V$ si descrive come sostegno di una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), t)$, definita per $t$ in un intorno di $t_0 = 1$.

(b) Vicino al punto $P_0$ l'insieme $V$ si descrive come sostegno di una curva $\gamma(t) = (x(t), t, z(t))$, definita per $t$ in un intorno di $t_0 = 1$.

(c) Vicino al punto $P_0$ l'insieme $V$ si descrive come sostegno di una curva $\gamma(t) = (t, y(t), z(t))$, definita per $t$ in un intorno di $t_0 = 1$.

*Seleziona tutte le voci applicabili.*

- [x] (a)
- [x] (b)
- [ ] (c)

11. 4 punti

Se $\gamma$ è definita come nella domanda precedente si calcoli $\gamma'(1)$ (si può dare per buono che le definizioni date da (a), (b) e (c) danno lo stesso risultato e quindi se ne può usare una qualunque).

$\gamma'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

NON È VERO. PERÒ DALLA RISPOSTA SI CAPISCE QUALE CASO SI È considerato

Domanda 3

Si considerino $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $V \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$f(x, y) := 3x - 4y$$
$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

12. 1 punto

Si dica se è vera l'affermazione: "$f$ non ha punti stazionari interni a $V$".

*Contrassegna solo un ovale.*

- [x] SI'
- [ ] No

$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mai nullo

13. 2 punti

Si dica se è vera l'affermazione: "$f$ non ha punti stazionari vincolati su $V$ del tipo $(x, 0)$ con $|x| < 1$".

*Contrassegna solo un ovale.*

- [x] SI'
- [ ] No

$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mai del tipo $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla G_2$

dove $G_2(x,y) = y \Rightarrow \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. 2 punti

Si dia una breve motivazione per la risposta alla domanda precedente.

15. 5 punti

Si trovino tutti i punti stazionari vincolati per $f$ su $V$ (rispondendo eventualmente "non ne esistono".

$(-1, 0)$ $(1, 0)$ $\left(-\frac{3}{5} \ \frac{4}{5}\right)$

16. 2 punti

Si calcoli $\max_{(x,y)\in V} f(x,y)$ (o si scriva "non esiste")

3

17. 2 punti

Si calcoli $\min_{(x,y)\in V} f(x,y)$ (o si scriva "non esiste")

$-5$

Domanda 4

$f(x,y) = 3x - 4y \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$V = \{ x^2 + y^2 \leq 1 , \; y \geq 0 \} = \{ G_1 \leq 0 , \; G_2 \leq 0 \}$ dove

$G_1 = x^2 + y^2 - 1 \qquad G_2 = -y \qquad \nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

PTI · STAZ. LIBERI $\nabla f = 0$ IMPOSS.

· PTI STAZ. dove si annulla solo uno $G_i$ $(i = 1,2)$

(a) $\begin{cases} 3 = \lambda \, 2x \\ -4 = \lambda \, 2y \\ x^2 + y^2 = 1 , \; y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix} \quad \frac{3}{x} = 2\lambda = \frac{-4}{y} \Rightarrow 3y = -4x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{4x}{3} \Rightarrow x^2 + \frac{16}{9} x^2 = 1 \Rightarrow 25 x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm \frac{3}{5}$

$y = \mp \frac{4}{5}$

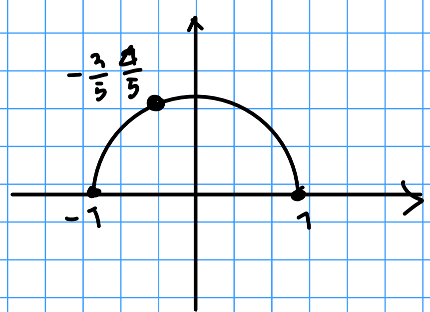
dato che $y > 0$ TROVO $\left( -\frac{3}{5} , \frac{4}{5} \right) \Rightarrow f$ vale $-\frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -5$

(b) $\begin{cases} 3 = \lambda \cdot 0 \\ -4 = \lambda (-1) \\ x^2 + y^2 < 1 , \; y = 0 \end{cases}$ IMPOSSIBILE

. PTI IN CUI SI ANNULLANO $G_1$ e $G_2$ : $(-1, 0) \quad (1, 0)$

in questi punti $f$ vale $-3$ e $3$

$\Rightarrow \max_V f = f(1,0) = 3 \qquad \min_V f = f\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -5$



Si considerino $f : \mathbb{R}^3 \to \cancel{[0,+\infty]}\ ]-\infty,+\infty]$ e l'insieme $D \subset \mathbb{R}^3$ deifiniti da:

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2>0 \\ +\infty & \text{se } x^2+y^2=0. \end{cases}$$

$$D := \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2+y^2\}$$

18. 2 punti

Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta:

(a) $f$ è misurabile in quanto continua $\left(\lim_{P\to P_0} f(f) = f(P_0) \text{ per ogni } P_0 \in \mathbb{R}^3\right)$.

(b) $f$ è misurabile in quanto continua tranne che in un punto (i punti hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$).

(c) $f$ è misurabile in quanto continua tranne che in una retta (le rette hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$).

(d) $f$ è misurabile in quanto continua tranne che in un piano (i piani hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$).

(e) Nessuna delle precedenti.

*Contrassegna solo un ovale.*

- ( ) (a)
- ( ) (b)
- (X) (c)
- ( ) (d)
- ( ) (e)

$\{x^2+y^2=0\} = \{x=0\ \ y=0\}$ è l'asse z

cioè una retta in $\mathbb{R}^3$

19. Criterio (b) 6 punti

Si calcoli $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ (o si scriva "non esiste").

0

Si vede che $\iiint_D |f|\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} |z|\,dz \int_z^{\sqrt{1-z^2}} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,\rho\,d\rho}{\rho^2}$

$= 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta}_{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{2}/2} z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} z(1-z^2-z^2)\,dz$

$= \frac{1}{4}\int_0^{1/2} (1-2s)\,ds = \frac{1}{4}\left[s-s^2\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} < +\infty$

Dunque $f$ è integrabile. Dato che $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$ e che $D$ è simmetrico rispetto al piano $xy$ $\Rightarrow \iiint_D f = 0$

20. 2 punti

Si descriva brevemente il procedimento utilizzato per svolgere il punto precedente (indicare i teoremi/le formule utilizzati senza riportare i calcoli).

VEDI SOPRA